7. Elektrostatik

7.1 Elektrisches Feld, Coulomb-Kraft, Spannung

Ein ähnliches Kraftgesetz wie zwischen zwei Massen gilt zwischen zwei elektrischen Ladungen. **Elektrische Ladungen** können durch Reibung zwischen Festkörper-oberflächen erzeugt werden (Katzenfell an Glas, Wolle an Kunststoff). Zwischen elektrischen Ladungen wirken Kräfte. Bei genauerer Untersuchung ergibt sich:

● Es gibt **zwei Typen von Ladungen, positive (+) und negative (-)**. Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, Ladungen mit verschiedenem Vorzeichen ziehen sich an.

● Freie Ladungen treten nur als ganzzahlige Vielfache eines „kleinsten Ladungspaketes“, des Elementarquantums der elektrischen Ladung oder Elementarladung e auf (**Ladungsquantisierung**). Träger der Elementarladung in gewöhnlicher Materie sind die negativ geladenen Elektronen und die positiv geladenen Protonen.

● Die Ladung eines Objektes ist unabhängig von seinem Bewegungszustand.

● In einem abgeschlossenen System ist die Summe aller Ladungen konstant (**„Ladungserhaltung“**). Für jede positive Ladung, die in einem abgeschlossenen System erzeugt wird, muß also eine gleich große negative Ladung erzeugt werden.

Die Kräfte zwischen zwei Ladungen wirken längs der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Der Betrag der Wechselwirkungskraft, der sog. **Coulombkraft**, ist:

$$F_C(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$ **Coulomb-Gesetz**

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm elektrische Feldkonstante

Das Formelzeichen für die Ladung ist q oder Q. Die SI-Einheit der elektrischen Ladung ist A•s = C (Coulomb). Die Elementarladung beträgt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Analog zum Gravitationsfeld beschreibt man die Veränderung des Raumes in der Umgebung einer Ladung Q durch die elektrische Feldstärke E. E ergibt sich durch Division der Coulomb-Kraft durch eine Probeladung und ist ein Vektor:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{Q}{r^2}$$ **Elektrische Feldstärke im Abstand r von Q**

Die elektrische Feldstärke ist ein Vektor, der in die Richtung zeigt, in die eine ruhende, **positive** elektrische Ladung in dem elektrischen Feld beschleunigt würde. Wenn man durch den Raum Linien zeichnet, deren Tangentenrichtungen mit der jeweiligen Richtung von **E** übereinstimmen, erhält man die sog. **Feldlinien**. Je dichter die Feldlinien liegen, desto größer ist die elektrische Feldstärke in diesem Raumbereich. Die elektrischen Feldlinien beginnen in positiven Ladungen und enden in negativen Ladungen: **„Die Ladungen sind die Quellen und Senken des elektrischen Feldes“.**

Wenn in einem Raumbereich mehrere elektrische Ladungen vorhanden sind, ist die elektrische Feldstärke in einem Raumpunkt die Vektorsumme der Feldstärken, die die einzelnen Ladungen erzeugen. Ein **homogenes elektrisches Feld** (d.h. **E** ist im gesamten Raumbereich konstant) wird technisch im **Plattenkondensator** erzeugt. Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten mit gleicher Fläche, die jeweils die Ladung +Q und -Q tragen. In einem homogenen elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung eine konstante Kraft. Die Bewegung eines geladenen Teilchens im Feld eines Plattenkondensators entspricht daher der Bewegung eines Massenpunktes im Schwerefeld der Erde.

Die elektrostatische wechselwirkung ist konservativ, d.h. man kann im elektrischen Feld eine potentielle Energie definieren. In der Vorlesung wurde dieses Konzept anhand eines positiv geladenen Teilchens in einem Plattenkondensator erläutert, das entgegen den Feldlinien von x1 nach x_2 bewegt wird. Analog zur Situation beim Heben eines Massenpunktes im Schwerefeld der Erde muß dabei Arbeit gegen das elektrische Feld geleistet werden:

$$W(x_1 \rightarrow x_2) = q \bullet E \bullet (x_2 - x_1)$$

Diese geleistete Arbeit steckt jetzt als potentielle Energie in dem Teilchen, denn sie kann z.B. in Beschleunigungsarbeit umgesetzt werden, wenn Sie das Teilchen loslassen. Die Arbeit selbst ist ungeeignet, um die energetischen Verhältnisse im Raum zu beschreiben, weil das Vorzeichen der Ladung eingeht. Deshalb definiert man als Potential φ eines Raumpunktes die arbeit in Bezug auf einen Referenzpunkt, allerdings dividiert durch die Ladung, und bezeichnet als **Potentialdifferenz** oder **Spannung U** zwischen x_1 und x_2 die Größe:

$$U = \frac{W(x_1 \rightarrow x_2)}{q}$$ Elektrische Spannung

Die SI-Einheit der elektrischen Spannung ist J/C = V (Volt).

Für das homogene Feld im **Plattenkondensator** ergibt sich daraus:

$$U = W/q = E \bullet (x_2 - x_1)$$

☑ Wenn man die Ladung von einer Platte zur anderen bringt, ist U die Spannung zwischen den beiden Platten und $(x_2 - x_1)$ der Plattenabstand d, also $U = E \bullet d$.

Flächen im Raum, für die das Potential (also die Spannung in Bezug auf einen Referenzpunkt) auf der ganzen Fläche denselben Wert hat, heißen **Äquipotentialflächen**. Auf diesen Flächen kann eine Ladung verschoben werden, ohne daß dazu eine Arbeit geleistet werden muß. Die elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen. Die Platten eines Plattenkondensators sind Äquipotentialflächen, aber auch alle Ebenen parallel zu den Platten im Innern des Kondensators. Die Äquipotentialflächen in der Umgebung einer Punktladung sind konzentrische Kugelschalen mit der Ladung im Kugelmittelpunkt.

Aus der Definition der Spannung ergibt sich die Formulierung der Energieerhaltung im elektrischen Feld für ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q, das sich von x_1 nach x_2 bewegt:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, v_1^2 = q \bullet U(x_1, x_2)$$

Wenn ein Teilchen also die Spannung U durchläuft, ändert sich seine kinetische Energie um qU. Auf diese Weise werden mit elektrischen Feldern Teilchen beschleunigt, z.B. in der Röhre eines CRT-Bildschirms.

Statische elektrische Felder spielen in der Technik eine große Rolle, z.B. bei der Elektrophotographie oder „Xerographie“ (Laserdrucker, Farbkopierer) oder in der Speichertechnologie (CCD-Arrays in Video-Kameras, EEPROMS).

7.2 Plattenkondensator, Feldenergie, Kapazität

Grundsätzlich kann man numerisch über das Coulomb-Gesetz aus einer gegebenen Ladungsverteilung das elektrische Feld berechnen. rechnerprogramme, die das leisten, sind verfügbar.

Bei einfachen Geometrien ist es möglich, das Feld aus der Ladungsverteilung analytisch zu berechnen. Dazu verwendet man den Satz von Gauß:

Der **elektrische Fluß** Φ durch eine geschlossene Oberfläche, die die Ladungen q_i umschließt, ist gleich der Summe dieser Ladungen dividiert durch ε_0.

Der elektrische Fluß durch eine Fläche ist das Produkt aus der Komponente von **E** senkrecht zur Fläche mit dem Flächeninhalt. Wenn die Fläche gekrümmt und E nicht über die gesamte Fläche konstant ist, wird die Fläche in kleine Elemente eingeteilt, die einzelnen Flüsse werden aufsummiert, d.h. der Gesamtfluß wird als Integral berechnet:

$$\boxed{\Phi = \int E \bullet dA = \left(\sum q_i \right) / \varepsilon_0}$$

A

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie aus dieser Beziehung das elektrische Feld einer homogen geladenen Platte und daraus das Feld eines Plattenkondensators berechnet werden kann.

☑ Für den **Plattenkondensator**, bestehend aus zwei Platten mit den Ladungen +Q und -Q mit Plattenabstand d und Plattenfläche A ergibt sich:
- Das elektrische Feld außerhalb der Kondensatorplatten ist Null, wenn die Plattenfläche groß gegen d^2 ist, also für „sehr große Kondensatorplatten mit geringem Abstand“
- Das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten ist:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \bullet A}$$

Wegen E = U/d ist also:

$$U = \frac{Q \bullet d}{\varepsilon_0 \bullet A}$$

☑ Für eine Kugel, die die Ladung Q enthält, ist für Punkte außerhalb der Kugel das elektrische Feld dasselbe, als sei die Gesamtladung im Kugelmittelpunkt konzentriert.

☑ Für eine Kugelschale mit Radius R, die auf ihrer Oberfläche die Ladung Q trägt, ist:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad \text{für } r >= R \text{ (außerhalb der Kugel)}$$

$$E(r) = 0 \qquad \text{für } r < R \text{ (im Innern der Kugel)}$$

☑ Für eine Kugel, deren Ladung Q gleichmäßig im Kugelvolumen verteilt ist, wird:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad \text{für } r >= R \text{ (außerhalb der Kugel)}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \cdot r}{R^3} \qquad \text{für } r < R \text{ (im Innern der Kugel)}$$

Freie Ladungen im Innern der Kugel werden also zur Kugeloberfläche hin beschleunigt und sammeln sich dort, bis das Kugelinnere feldfrei ist. Dasselbe gilt qualitativ auch für andere Leitergeometrien: im statischen Zustand ist das Innere feldfrei, die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche.

In einem Leiter, der in ein äußeres elektrisches Feld gebracht wird, werden also so lange Ladungen an die Oberfläche verschoben, bis das Innere des Leiters feldfrei ist („Influenz"). Das elektrische Feld, das durch die Oberflächenladungen erzeugt wird, kompensiert dann im Innern des Leiters das äußere elektrische Feld. Das ist das Prinzip des **„Faradaykäfigs"** (Abschirmung elektrischer Felder durch rundum geschlossene Metallgeflechte, z.B. „Schirmschlauch" bei Signalleitungen).

Bei einem Kondensator, gleich welcher Geometrie, definiert man die Kapazität als Verhältnis der im Kondensator gespeicherten Ladung zur Spannung am Kondensator:

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \text{Kapazität}$$

☑ Für den Plattenkondensator ist $C = (\varepsilon_0 \cdot A) / d$

☑ Wenn zwei Kondensatoren parallel geschaltet werden, ist die Kapazität der Gesamtanordnung die Summe der Einzelkapazitäten; werden sie hintereinander geschaltet, ist der Kehrwert der Gesamtkapazität die Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten.

Es ist Arbeit erforderlich, um z.B. in einem Plattenkondensator das elektrische Feld aufzubauen. Das können Sie sich verdeutlichen, wenn Sie sich vorstellen, daß die Ladung jeweils portionsweise von der einen Platte zur anderen gebracht werden muß; dabei muß Arbeit gegen das Feld geleistet werden, das bereits im Kondensator vorhanden ist. In der Vorlesung wurde berechnet, daß die im Plattenkondensator gespeicherte Arbeit gegeben ist durch:

$$W = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \cdot d$$

Die Energiedichte, also die gespeicherte Energie pro Volumen, ist dann:

$$W / V = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Diese Beziehung gilt für jedes elektrische Feld, unabhängig davon, ob es homogen oder inhomogen ist oder wie es erzeugt wurde. In elektrischen Feldern ist also Energie gespeichert. In der Elektronik werden beispielsweise elektrische Felder von Kondensatoren mit hohen Kapazitäten als Energiespeicher benutzt, um kurzzeitige Netzschwankausfälle bei der Versorgung von Geräten zu überbrücken.